



Reptes, peces de construcció i cubs per a entendre les mesures de longitud, superfície i volum.

Ernest Arnau Marco
IES Betxí, Betxí.
adjunts@gmail.com

Resum • Al llarg de les etapes acadèmiques hi ha conceptes que, per la seua importància i utilitat, es repeteixen en diversos nivells. Un d'ells són les escales d'unitats. L'alumnat s'inicia en la conversió d'unitats a primària per a, en el primer cicle de l'ESO, acabar d'assentar el seu domini. En el present article presentem els conceptes de longitud, superfície i volum de forma no memorística. A partir de les nocions bàsiques, de reptes i peces de construcció s'entendran els diferents canvis d'unitats. La comprensió profunda de les nocions exposades s'aconseguirà en fabricar un cub amb el qual trobarem l'equivalència entre litre i decímetre cúbic.

Paraules clau • Longitud, superfície, volum, cub, peces de construcció, unitats i mesura.

Challenges, construction blocs and cubes to understand the measures of length, Surface area and volume.

Abstract • Throughout the academic stages there are concepts which, because of their importance and usefulness, are repeated at various levels. One of them is the System of Units. Students are introduced to the conversion of units in primary school and, in the first cycle of ESO, they will finish mastering it. In this article we present the concepts of length, surface area and volume in a non-rote way. From the basic notions, challenges and building blocks, they will understand the different changes of units. The deep understanding of the notions presented is achieved by making a cube with which to find the equivalence between litre and cubic decimetre.

Keywords • Length, area, volume, cube, construction blocs, units and measurement.

INTRODUCCIÓ

El desinterès cap a les assignatures de l'àmbit CTEM (per les sigles Ciència, Tecnologia, Enginyeria i Matemàtiques) ha estat una preocupació des de fa molts anys (Esteve i Solbes, 2017; Rocard et al., 2007). Un dels motius és que l'ensenyament de les ciències es centra en aspectes conceptuals amb poques referències als treballs pràctics (Solbes et al., 2007). Els treballs pràctics, entre altres avantatges, augmenten la motivació i interès de l'alumnat (Lunetta i Tamir, 1979) i són de major interès al permetre visualitzar objectes i fets que la ciència explica (Séré, 2002).

Per tant, un dels problemes en l'aprenentatge és la falta d'experimentació i comprovació. Es presenten els conceptes i l'alumnat els creuen; assumeixen que simplement són així sense preguntar-se el motiu. Aquest ensenyament dona lloc a un saber fràgil en el qual l'alumnat aprèn a resoldre problemes de manera mecànica. A més, l'estudi per memorització té poc abast, s'oblida aviat i sols se sap aplicar en reduïts entorns.

Com assenyala Chamorro (2001), la mesura de magnituds ha estat sempre una part fonamental de la formació matemàtica en l'ensenyament elemental. No obstant, les deficiències i els errors en la seua ensenyança fan necessari un estudi més profund per detectar les causes de les dificultats i millorar la pràctica docent. La implantació del Sistema Mètric Decimal a Espanya a mitjans del segle XIX no només va portar una nova forma de mesurar, sinó que també va acompanyar un canvi significatiu en les polítiques educatives del país, impulsant la modernització de l'ensenyament i propiciant l'elaboració de nous materials didàctics (Picado-Alfaro et al., 2015).

Aquesta rellevància en l'educació hauria de traduir-se en una sèrie d'activitats que consoliden l'aprenentatge; fet que no s'ha produït i el professorat pensa que és un saber abstracte (Chamorro, 2001). La comprensió del Sistema Mètric és el fonament per a posteriors ampliacions en matemàtiques o ciències; com poden ser les lleis d'escala i la interdisciplinarietat entre ciències i matemàtiques (López-Simó, 2010). A més, mesurar

magnituds és fonamental en la història de la humanitat i ho realitzem diàriament (Feliz, 1982).

Les mesures no són sols un tema acadèmic, l'alumnat es troba en contacte continu amb les paraules: metre, superfície, àrea, volum... Per exemple, solen escoltar que la distància fins a l'institut és de tres-cents metres o que el seu poble té una superfície de 64 km². Al mateix temps també es troben amb les ampolles d'aigua de, per exemple, un litre. Pocs relacionen tots aquests conceptes entre sí i, encara menys alumnes, els connecten amb les explicacions de classe.

A continuació es detallarà una aplicació a l'aula realitzada amb l'alumnat de diferents nivells; des del Programa de Millora de l'Aprenentatge (PMAR), Programa de Diversificació Curricular (PDC) a 2n d'ESO i 3r d'ESO de l'assignatura de Física i Química. El PMAR és un programa educatiu dissenyat per ajudar els estudiants de 2n i 3r d'ESO que enfronten dificultats per seguir el pla d'estudis convencional. El mateix correspon al PDC però amb alumnat de 3r i 4t d'ESO. A través d'una metodologia més personalitzada i adaptada a les seves necessitats individuals, el PMAR i el PDC busquen millorar el seu aprenentatge i rendiment acadèmic. Així mateix, es considera que la proposta es adaptable a l'alumnat d'Educació Primària.

L'objectiu ha estat millorar la comprensió de les unitats de longitud, superfície i volum, així com l'equivalència entre decímetre cúbic i litre. Amb el procediment que es planteja en aquest article concretem conceptes abstractes (longitud, superfície, volum) i els relacionem amb situacions properes a l'alumnat.

El desenvolupament de la proposta està basat en el raonament, per part de l'alumnat, tenint present l'evolució històrica de la ciència. D'aquesta manera, es fa possible un ensenyament actiu, en el qual l'alumnat està implicat en el procés d'aprenentatge. Mitjançant l'aplicació d'aquesta seqüència l'alumnat pot interactuar més estretament amb els conceptes de longitud, superfície i volum i, així, comprendre'ls millor.

DESCRIPCIÓ DE LA PROPOSTA

Longitud

Primera part: trobar un patró

Una estratègia per a facilitar l'aprenentatge de les matemàtiques és utilitzar mesures no convencionals abans d'introduir les del Sistema Internacional (Borges, 2001). El punt de partida a l'aula és un repte (mesurar la distància entre diversos objectes de l'aula) expressat a través d'una pregunta: Com li indicaries a una altra persona la distància entre la teua taula i la finestra?

Per respondre a la nostra pregunta és necessari pensar com es poden mesurar distàncies i com comunicar-les. En relació a la mesura, l'alumnat sol demanar un metre però davant d'aquesta petició cal respondre que no disposem de tal instrument (tampoc els permetrem utilitzar les seues regles). Cal entendre que volem recórrer el camí realitzat històricament fins al patró metre; això implica no disposar inicialment de cap regla o metre.

Després d'uns moments l'alumnat pensarà a emprar el material que té a la seua disposició: passos, pams, peus, un pal... fins i tot la mateixa taula. Així, la distància entre els objectes serà les vegades que necessitem fer ús d'eixe patró, per exemple, 7 peus. Aquesta estratègia d'utilitzar el terme "vegades" aniria en consonància amb l'expressada per Borges (2001) per tal de facilitar l'aprenentatge de les matemàtiques. Podem anar anotant totes les respostes en la pissarra.

La reflexió necessària és: Quina de totes les eleccions és la correcta? Amb aquesta pregunta, es pretén entendre que no hi ha una resposta única. Unes són més útils que altres, però totes possibiliten respondre a la pregunta inicial; per exemple: 5 passos o 20 pams. Però per compartir informació i comparar valors, hi ha dues possibilitats. La primera és trobar les diferents equivalències entre les eleccions per després realitzar la conversió entre les mesures. La segona possibilitat és posar-se d'acord i definir un sistema de mesures únic dins de la classe. Es fa evident que la primera opció és poc útil, a més d'enrevessada, i cal posar-se d'acord. Al final,

l'alumnat va establir com a patró els passos de l'alumna que havia proposat utilitzar-los. Van descartar els pams pel fet de requerir moltes repeticions per a la distància inicial.

En aquest punt es fa notar que els i les científiques es van trobar en el mateix problema; per a compartir investigacions van haver d'elegir un patró: el Sistema Internacional d'Unitats.

El següent avanç és que es mesuren diferents distàncies: de la pissarra a la porta, de la paret nord a la paret sud, i així successivament... En un moment determinat, els alumnes van voler utilitzar el patró pas per a mesurar distàncies més menudes, com la llargària dels seus estoigs. Per aconseguir això, van haver de dividir el patró en parts més menudes. Per fer-ho van recuperar la idea inicial dels "pams", i van establir que un "pas" era equivalent a 4 "pams". Això significa que la mida de l'estoig és d'un "pam".

A continuació, van decidir que per mesurar objectes encara més menuts, necessitaven dividir el "pam" en "dits", establint que 1 "pam" era equivalent a 9 "dits".

Per tant, el sistema de mesura establert per la classe va ser el següent:

- Pas: el nostre patró.
- Pam: divisió del pas; 4 pams = 1 pas.
- Dits: divisió de pam; 9 dits = 1 pam. És a dir, 1 pas = 36 dits.

És el mateix que ens passa en el Sistema Mètric:

- Metre: el nostre patró.
- Decímetre: dividim el nostre patró en deu parts.
- Centímetre: dividim cada part del decímetre en deu, $10 \cdot 10 = 100$ parts.
- Mil·límetre: dividim cada centímetre en deu parts, $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ parts.

Així doncs, el nostre alumnat ha reproduït el pensament seguit fins a arribar al Sistema Mètric en el qual els mil·límetres, centímetres i decímetres s'utilitzen per a mesurar distàncies menudes. A més, ho ha fet prenent part del procés de mesurar i reflexionar sobre el valor de les mesures i la necessitat de compartir les dades obtingudes a través d'un sistema estandarditzat.

Segona part: les peces de construcció

La comprensió per part de l'alumnat de la utilització d'aquesta mesura no convencional ajuda a la posterior interiorització de les mesures de superfícies (m^2) o volums (m^3).

Per aquest motiu, i pensant en la posterior ampliació d'aquest procediment a superfícies i volums, introduïm les peces de construcció com a patró de mesura de distància (Figura 1). Amb el seu ús l'alumnat també comprovarà la importància d'agrupar les peces per a conèixer distàncies més grans. L'analogia entre aquest procediment de la mesura no convencional i la convencional (metre) és directa. Realment el que estem fent és ajuntar peces igual que amb el metre en decàmetre (10 metres), hectòmetre (100 metres), kilòmetre (1000 metres)...

En la figura 1 es mostra l'agrupament de dues unitats individuals (1) en una altra més fàcil d'utilitzar (2). Per a facilitar la mesura també s'ha seguit una seqüència de colors. La longitud del portamines (4) seria de 18 unitats de construcció amb la seqüència de dues peces de construcció: taronja, roig, rosa, groc, taronja, roig, rosa, groc.

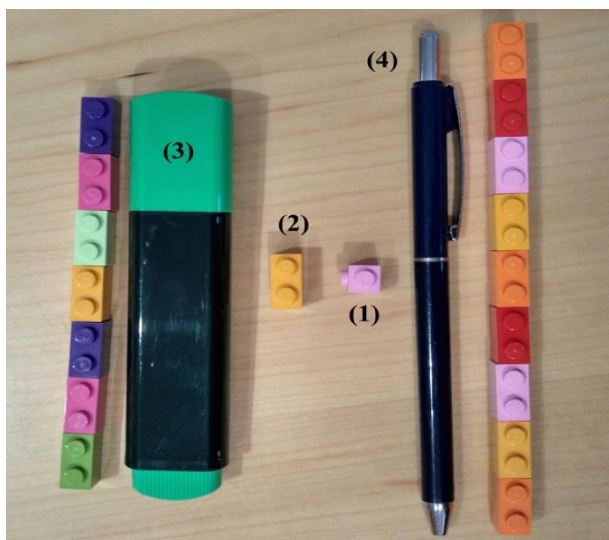


Figura 1: Mesura de diferent material escolar utilitzant la peça de construcció (1) com a patró. El retolador fluorescent (3) té una longitud de 14 unitats de construcció, el portamines (4) de 18 unitats de construcció.

Una part del nostre alumnat anirà més enllà i, enlloc de les agrupacions de dues peces, utilitzarà unes altres de tres o quatre; tot segons la disposició que tinga en el seu repositori de peces. El debat i posada en comú a la classe també va ser enriquidor. Es van adonar que hi havia diferents agrupacions possibles però que totes partien de la peça unitat (en la figura 1 marcada com a (1)). Aquest fet permetia la compartició de resultats, el portamines sempre tenia 18 unitats de construcció independentment de si les agrupacions eren individuals (18 peces), dobles (9 peces dobles) o triples (6 peces triples).

Superfície

Primera part: cobrir superfícies

Seguint l'esquema de la part de longituds, partim del plantejament d'una pregunta: *Tenim dues taules, la del professorat i la de l'alumnat; si desitgem cobrir les taules amb fulls amb quina en necessitarem més?* Aquesta pregunta és fàcil, la del professorat, i tota la classe hi està d'acord. Però la resposta ja no és tan immediata si comparem la taula del professorat amb dues taules de l'alumnat donat que tenen una superfície semblant. En aquest cas serà necessari distribuir els fulls per a cadascuna de les superfícies i després comparar el nombre necessari.

La finalitat de les preguntes és que el nostre alumnat entenga la necessitat de tenir un objecte amb el qual comparar. Aquest objecte ha de tenir una sèrie de característiques com no canviar de mida al llarg de la realització de la comprovació o ser manejable. En aquest cas, per sort tenien els fulls! A més, estem reforçant/ampliant la necessitat de comparar per a mesurar i s'ha realitzat amb un objecte bidimensional com és el full de paper.

Segona part: entren en acció les peces de construcció

Una vegada realitzada la introducció amb el full es planteja la pregunta: *Es pot relacionar el full utilitzat amb el patró de la primera part o amb la peça de construcció?*

Aquesta pregunta comporta una estona de reflexió a la classe i relacionar procediments ja realitzats amb anterioritat. És normal que es

necessite un temps per a reflexionar, estem demanant relacionar un objecte en dos dimensions com és el full amb un altre que hem tractat com si sols en tingues una.

Després de raonar i posar en comú les idees que els van sorgint arriben a la solució de col·locar les peces de construcció de forma que tapen el full. En el nostre cas vam utilitzar mig full per a reduir el temps en el qual estan col·locant les peces (figura 2).

Un altre avantatge amb el qual ens vam trobar utilitzant aquesta metodologia és que podem aprofitar que tenim el mig full tapat amb les peces de construcció per aprofundir en el coneixement matemàtic de multiplicació. Això s'aconsegueix amb la pregunta: *Quin nombre de peces hem utilitzat?*

Per a saber la quantitat de peces utilitzades, part de l'alumnat va començar a sumar les peces. En el nostre cas els vam deixar procedir fins que es van descomptar o arribar a un nombre. Uns quants alumnes van trobar el resultat de forma ràpida multiplicant les peces base per les d'altura. En el

nostre mig full les mesures són de 27 unitats de peces de longitud i 19 d'amplària, el que ens indica que necessitarem: $27 \cdot 19 = 513$ unitats de peces de construcció. Amb aquest procediment es va aconseguir que l'alumnat comprovés la potència de la multiplicació: primer col·locant les peces i comptant-les per adonar-se que, en multiplicar, obtenim el mateix resultat.

És el mateix que fem amb el patró metre. En el cas d'un rectangle, si multipliquem la longitud base per la longitud altura, tots dos en metres, obtindrem la superfície del rectangle en metres quadrats.

Aquest procediment té un altre avantatge. Ens permet connectar la nostra àrea del quadrat amb el llenguatge utilitzat a matemàtiques. Una part de l'alumnat té dificultats en recordar que quan una variable està elevada a dos ($x \cdot x = x^2$) diem "al quadrat". Li serà més fàcil de recordar si entén que l'origen d'aquesta notació està en el que s'ha exposat amb anterioritat; en multiplicar *metre* · *metre* s'obté m^2 o el que és equivalent, l'àrea del quadrat. Aquesta connexió entre quadrat, l'operació i la forma d'expressar l'elevat a 2 facilita la comprensió i, per tant, recordar el nom matemàtic.

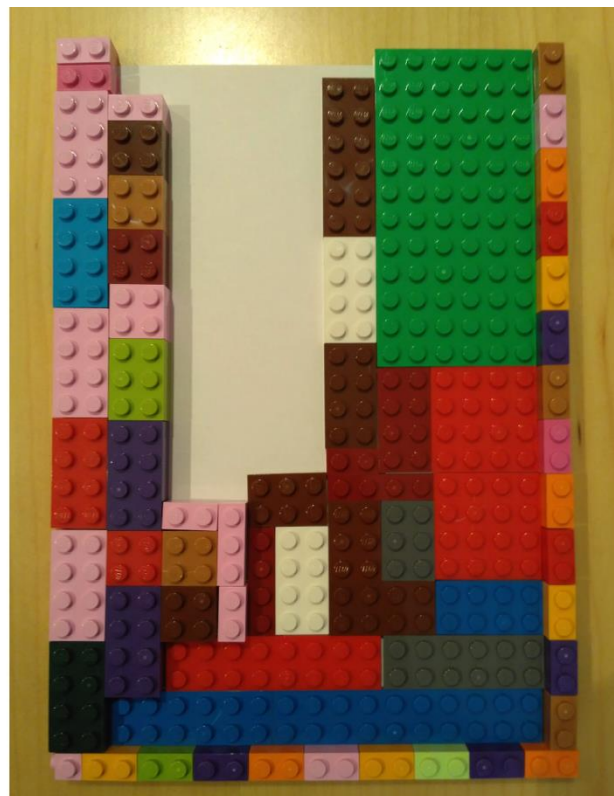
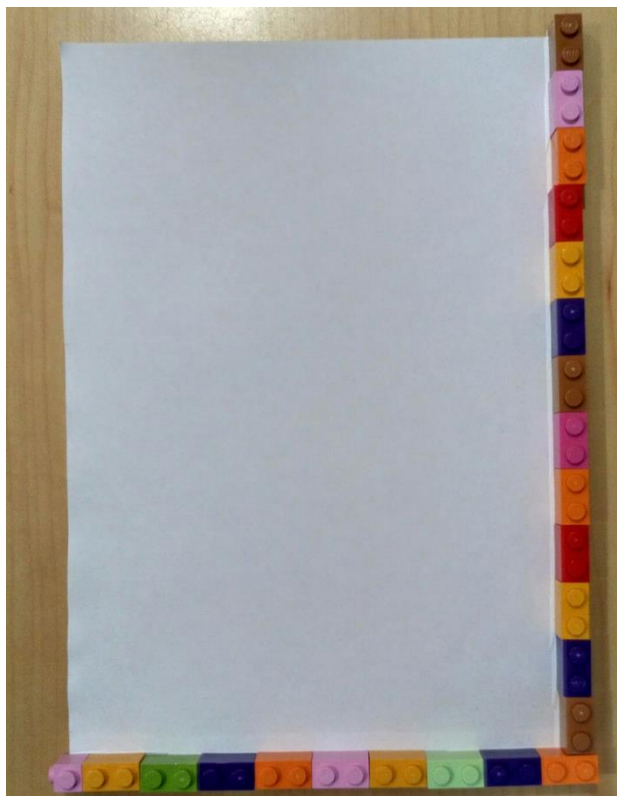


Figura 1. a. (esquerra) Inici del recobriments de mig full amb peces de construcció. S'observa la longitud de 27 unitats i una amplària de 19 unitats. b (dreta) Part final del procés de recobriments del full.



Figura 3. Emplenament de la caixa amb peces de construcció. a. (esquerra) Càlcul de les dimensions: altura 5 unitats, ample 9 unitats i llarg 17 unitats. b. (dreta) Inici de la col·locació de peces per a emplenar la caixa.

Volum

Primera part: directe a les peces de construcció!

En demanar al nostre alumnat com compararien el volum de dues caixes de mòbils (també podríem utilitzar qualsevol altre recipient) el salt a les peces de construcció és immediat. Des d'un principi van voler emplenar per complet l'interior amb les peces (figura 3); fins i tot, extrapolaren la idea de multiplicar cada costat i l'altura (figura 3a).

*“Peces d'un costat” · “Peces de l'altre costat” ·
“Peces de l'altura” = “nombre total de peces”*

D'aquesta forma s'obté $9 \cdot 17 \cdot 5 = 765$ unitats de volum. Com també es va realitzar amb la superfície passem a emplenar l'interior (figura 3b) i comprovar el càlcul realitzat. Des d'un inici cap participant va intentar sumar les unitats i van passar directament a la multiplicació. Aquest salt directe ens dona a entendre que s'ha interioritzat les avantatges de la multiplicació.

El seu equivalent matemàtic o en el Sistema internacional seria:

$$x \cdot x \cdot x = x^3 \quad \leftrightarrow \quad m \cdot m \cdot m = m^3$$

Seguint el procediment anàleg que amb la superfície, l'alumnat va relacionar la notació x^3 amb el volum ($m \cdot m \cdot m = m^3$) d'un cub.

Al seu mateix torn l'associació de superfície a m^2 i de volum a m^3 millora la comprensió de les fórmules de l'àrea o el volum de les diferents figures geomètriques. Amb aquest procediment es fa evident la necessitat de multiplicar dues distàncies per al càlcul de l'àrea o de tres per al volum.

Segona part: equivalència entre mesures de volum

Des de 1849 s'ha ensenyat el Sistema Mètric Decimal de forma predominantment memorística, amb una representació verbal dominant i acompanyada per una representació gràfica del metre cúbic (Picado-Alfaro et al., 2015). Per tant, és probable que l'equivalència entre el decímetre cúbic i el litre també s'hagi ensenyat principalment de forma verbal i no a través de l'experimentació.



Figura 4. a (esquerra) Cubs realitzats per l'alumnat amb diferents materials. b (dreta) Cub en el qual no es va tenir en compte el grossor de les parets.

Aquest desenvolupament de l'activitat és més constructiva i tindrà com a objectiu la realització d'un cub amb un volum interior d' 1 dm^3 . Junt amb això deixarem de costat les peces de construcció i farem el salt definitiu al metre.

Per construir el cub, els alumnes van poder triar diferents materials de construcció. En particular els més utilitzats van ser cartró i fusta. El nostre objectiu era construir el cub amb les mesures determinades (1 dm per cadascun dels costats) i omplir-lo amb aigua per comprovar l'equivalència entre el litre i el dm^3 . Vam explicar-los que havien de fer-ho així, però no els vam dir que havien de protegir el cub perquè no es mullés. Així doncs, van veure que el primer cub de cartró es desfeia amb l'aigua i no servia per al que volíem.

La fabricació del cub deixa part a l'exploració:

tenen un objectiu (construir el cub amb les dimensions donades) i diferents camins per aconseguir-ho. En la nostra experiència van començar retallant les parets de forma separada i després les ajuntaren; aquest procediment donà lloc a cubs que van denominar "deformes". La segona millora fou desplegar el cub sobre el cartó, retallar-lo i folrar-lo. La darrera part consistí a doblegar els costats obtenint cubs més compactes i amb menys fissures (figura 4).

Part de l'alumnat van portar les cares de fusta i les enganxaren durant la classe (també realitzaren el cub de cartó). Un parell de grups no van tenir present que el decímetre era interior i obtingueren cubs de menor mida (figura 4b).

L'última deducció serà l'equivalència entre dm^3 i litre utilitzant els seus propis cubs. La nostra

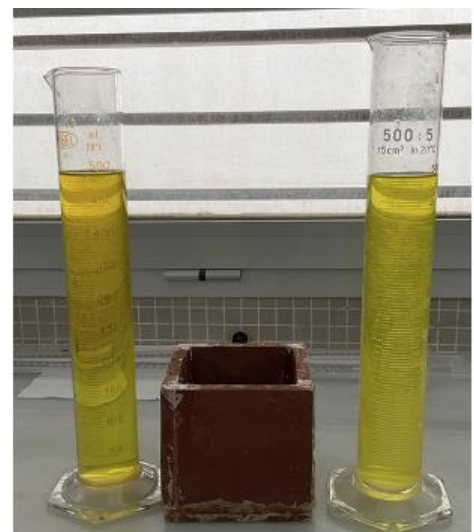


Figura 5. a (esquerra) Cub realitzat en fusta amb les dimensions correctes. b (dreta) El cub mostrat en la part esquerra junt a les dues provetes amb 1 litre; s'ha introduït colorant alimentari a l'aigua per a millorar la visualització.

experiència ens demostra que l'alumnat necessita experimentar i comprovar per assimilar. Per a saber que tenim un litre d'aigua ens pot servir una ampolla de mig litre de capacitat o unes provetes. Al nostre cas vam utilitzar dues provetes de 500 ml amb l'aigua i les vam col·locar junt al cub (figura 5b).

La pregunta era si tota eixa aigua cap en el cub que han fabricat. Resulta sorprenent la quantitat d'alumnes que, sabent prèviament l'equivalència $1\text{dm}^3 = 1\text{L}$, responen que és impossible.

CONCLUSIONS I AMPLIACIÓ

Com indica Domènech-Casal, (2023) citant a Blanco et al., (2012) els aprenentatges són més significatius si tenen context i es transfereixen entre diferents contexts. És a dir, l'alumnat interioritzarà en major mesura el que estem aprenent a classe si es relaciona amb la seua vida quotidiana i entre les diferents assignatures. Així, la seqüència didàctica exposada en aquest article va permetre que l'alumnat interioritzés:

- La importància de les unitats en les mesures. En concret, la necessitat de definir un patró de longitud i, en comparar, indicar quin és. Per exemple: “la distància de la taula a la pissarra són 5 metres” vol dir “hem comparat la distància problema amb la longitud definida com a metre i resulta que en són necessaris cinc”.
- La utilització de la multiplicació permet estalviar càlculs de sumes.
- La comprovació que multiplicar la base per la longitud proporciona la superfície, en multiplicar base per altura per costat obtenim el volum.
- La construcció d'un cub de mesures $1\text{ dm} \cdot 1\text{ dm} \cdot 1\text{ dm} = 1\text{ dm}^3$ i es comprova experimentalment l'equivalència amb el litre ($1\text{ dm}^3 = 1\text{ litre}$).

D'altra banda, a més de relacionar les mesures amb les matemàtiques, la construcció d'un cub de fusta pot ser un exercici conjunt amb les assignatures de tecnologia o formació professional bàsica (FPB) de fusteria.

Una possible ampliació de la idea bàsica seria augmentar la varietat de superfícies a altres formes més complexes. Això s'ha aconseguit amb èxit en el càlcul d'àrees i volums d'altres figures geomètriques, on els estudiants han après que per aconseguir més precisió és necessari utilitzar peces de construcció cada vegada més petites.

BIBLIOGRAFIA

- Blanco, Á., España, E. i Rodríguez, F. (2012). Contexto y enseñanza de la competencia científica. *Alambique: Didáctica de las ciencias experimentales*, (70), 9-18.
- Borges, M. (2001). Algunas estrategias para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, (45), 53-60.
- Chamorro, M. del C. (2001) Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en Educación Primaria y E.S.O. Dins E., Fernández, M del C. Chamorro i J. Belmonte (Coords.), *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas* (pp. 79–122). Ministerio de Educación, Cultura y Deporte Instituto Superior de Formación del Profesorado.
- Domènech-Casal, J. (2023). Situacions d'Aprenentatge. Idees per al desplegament curricular de les ciències. *Ciències: revista del professorat de ciències de Primària i Secundària*, (45), 73-85. <https://doi.org/10.5565/rev/ciencias.469>
- Esteve, A., i Solbes, J. (2017). El desinterés de los estudiantes por las ciencias y la tecnología en el bachillerato y los estudios universitarios. X Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las ciencias, 573-578.
- Feliz, G. P. (1982). El Sistema Métrico Decimal. Su importancia e implantación en España. *Cuadernos de historia moderna y contemporánea*, (3), 95 - 126.
- López-Simó, V. (2010). Interdisciplinarietat ciències/matemàtiques a través de les mides a la natura. *Ciències: revista del professorat de ciències de Primària i Secundària*, (17), 15-19. <https://doi.org/10.5565/rev/ciencias.373>
- Lunetta, V. N., i Tamir, P. (1979). Matching Lab Activities with Teaching Goals. *The Science Teacher*, 46(5), 22-24.
- Picado-Alfaro, M., Rico-Romero, L., i Gómez-Alfonso, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación*

- y *experiencias didácticas*, 33(3), 175-196.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1567>
- Rocard, M., Hemmo, V., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Wallberg-Henriksson, H., i European Commission and Directorate-General for Research and Innovation. (2007). *Science education NOW: a renewed pedagogy for the future of Europe*. Publications Office.
http://ec.europa.eu/research/rtdinfo/index_en.html
- Séré, M.-G. (2002). La enseñanza en el laboratorio. ¿Qué podemos aprender en términos de conocimiento práctico y de actitudes hacia la ciencia? *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 20(3), 357-368.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3953>
- Solbes, J., Montserrat, R., i Furió, C. (2007). Desinterés del alumnado hacia el aprendizaje de la ciencia: Implicaciones en su enseñanza. *Didáctica de las ciencias experimentales y sociales*, (21), 91-117.